

グラフ書き換えと時空間様相論理

萩 谷 昌 己^{†,††}

グラフを状態とする状態遷移系であるグラフ書き換え系は、時間とともに動的に変化するネットワークを記述できるため、種々の目的に利用されている。本発表では、グラフ書き換え系の検証を行うため、様相 μ 計算を基に、時相と空相の二種類の様相を持つ様相論理を提案する。空相はグラフの結合関係、時相はグラフの時間変化を表現する。様相論理式によってグラフ書き換え規則を形式化し、書き換え系の性質を検証するための推論規則を与える。最後に、グラフの表現に関して様相論理の本質的な限界について議論し、様相論理の表現力を高めるために状態量化を導入することを提案する。

Graph Rewriting and Spatio-Temporal Modal Logic

MASAMI HAGIYA^{†,††}

Graph rewriting systems, i.e., state transition systems whose states are graphs, have been used for various purposes because they can describe networks that dynamically change over time. In this presentation, we introduce a spatio-temporal modal logic, based on the modal μ -calculus, in order to verify properties of graph rewriting systems. The spatial modality represents connectivity relations of graphs, and the temporal modality changes of graphs over time. We formalize graph rewriting rules by modal formulas and introduce inference rules to verify properties of rewriting systems. We finally discuss the inherent limitation of modal logic with respect to expressing graphs, and propose to introduce state quantification in order to strengthen the expressibility of modal logic.

1. はじめに

1.1 状態遷移系の展開の軸

状態遷移系は形式的な検証技術が最も成功した対象である。様相論理は状態遷移系が満たすべき性質を表現する枠組であり、様相論理式に対する意味論と推論方法を与えている。また、モデル検査は状態の網羅的探索により様相論理式の検証を行う技術である⁵⁾

モデル検査に代表される状態遷移系の検証技術は、単純な離散の状態遷移系から、より表現力の豊かな枠組へとその範囲を広げて来た。状態遷移系の展開の軸としては、以下のような方向が考えられる。

- 単一プロセス マルチセット グラフ
- 時間 (実時間)
- 確率

ここで「単一プロセス マルチセット グラフ」という軸は、状態の構造がより複雑になって行くことを意味している。「単一プロセス」とは、通常の状態遷移

系のことであり、単一の状態が遷移して行く単純な状態遷移系のことである。「マルチセット」とは、複数のプロセスの状態のマルチセットを状態とする遷移系のことである。この枠組はベトリネットを包含する。最後に「グラフ」とは、プロセスがばらばらに存在するのではなく、関係を持ってグラフを構成することを意味している。グラフを状態とし、グラフ書き換えによって状態が変化する遷移系をグラフ書き換え系という⁶⁾

我々は、状態遷移系に関してこれまでに以下のような研究を行って来た。

- 時間付きマルチセット書き換え^{2),4)}
 - 時間への展開
 - マルチセットへの展開
- リンク構造の抽象化^{1),3)}
 - グラフへの展開

山本たちによる時間付きマルチセット書き換え^{2),4)}は、時間 (実時間) の概念を含むシステムの代表例である時間オートマトンと時間ベトリネットの両方を包含する枠組である。

また、高橋と萩谷はリンク構造を正則表現を用いて抽象化することにより、無限の状態空間を持つリンク

[†] 東京大学大学院情報理工学系研究科

Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

^{††} JST CREST

構造に対して抽象モデル検査を行う手法を提案し、実際にこれを並列ごみ集めの安全性・活性の検証に応用した^{1),3)}最近になってこの方法を発展させ、リンク構造をグラフに、正則表現を時相論理式に一般化することにより、グラフを時相論理式で抽象化する方法を考えている。

ノードを状態と見做し、ノードの属性をその状態で成り立つ原子命題と考えることにより、グラフを自然に Kripke 構造と捉えることができる。すると、上述の文献において、例えば、

$$[wgb]^*r$$

という正則表現は、

$$E((w \vee g \vee b) \text{ until } r)$$

という時相論理式 (CTL*) によって表現することができる。すると、従来、正則表現で行っていたノードの抽象化を時相論理式によって行うことができ、抽象ノード間の関係も、時相論理式の間で導出関係として捉えることができる。

1.2 時空間様相論理

前節では、グラフ上の結合関係を表現するために時相論理を用いる可能性について述べた。すなわち、グラフの各ノードが状態と見做され、空間的な遷移を表現するために時相論理の様相が用いられていた。

しかし、グラフ書き換えの枠組では、書き換え規則に従ってノードが変化する。本来、時相論理の様相はこのような時間的な遷移を表現するためのものであった。

従って、空間と時間の両方の様相を持つ様相論理を用いて、グラフ書き換えに関する性質を記述することは極めて自然なことから考えられる。例えば、 $\langle a \rangle$ をグラフのエッジに従った空間的な遷移を表現する様相、 $\langle r \rangle$ を書き換えによる時間的な遷移を表現する様相とすると、

$$P \wedge \langle r \rangle \langle a \rangle P$$

という様相論理式は、 P という性質が時間的な遷移によって隣のノードへ伝わることを表している。このように、ノードの性質が時間とともに空間上を伝わって行く情報の流れを表現することが可能になる。

以上のアプローチは、グラフ全体の状態に対して時間的な様相のみを用いる従来のアプローチとは異なっており、上述したように、時間と空間にまたがる情報の流れを表現するために適していると考えられる。

1.3 本研究

そこで、本研究では、グラフ書き換えの性質を記述し推論するために様相論理を用いる可能性について検討している。そのために、グラフのエッジ方向の空間様相と、書き換えによる遷移に対応する時間様相の二

種類の様相を持った時空間様相論理を提案した。

本論文では、グラフ書き換えについて説明した後、二種類の様相を導入する。次に、様相 μ 計算の必要性について議論し、具体的に二種類の様相を持つ時空間様相論理を与える。

その上で、グラフ書き換え規則を様相論理式によって表現する方法について述べる。特に、到達可能性論理式と不変論理式の定義を行い、最終的にグラフ書き換え規則によって導出される推論規則を定式化する。

最後に、グラフ書き換えの表現に関して、様相論理の本質的な限界について議論し、状態量化の提案を行う。

今後は、グラフ書き換えに、さらに状態遷移系の展開のもう一つの軸である実時間への展開も加味した体系を考えて行く計画である。様相論理の方は、時空間に実時間を加味したものになるだろう。

2. グラフ書き換え

2.1 グラフ

本論文では、属性の付いたノードとラベルの付いた有向エッジから成る有向グラフを書き換えの対象とする。ノードには複数の属性が付くことが可能である。形式的に、グラフとは、ノードの集合 V 、各ノードに属性の集合を対応させる関数 I 、ラベル付き有向エッジの集合 $E \subseteq V \times L \times V$ から成り立っている。 L はエッジ・ラベルの全体である。

2.2 グラフ書き換え規則

グラフの書き換えは、特定の文脈において、変化ノードと呼ばれるノード v に対して、以下のような操作を適用することによって行われるとする。

- ノード v に属性 Q を追加する。
- ノード v の属性 P を削除する。
- ノード v からノード v' へのラベル a の付いたエッジを追加する。
- ノード v からノード v' へのラベル a の付いたエッジを削除する。

書き換えの文脈は、参照ノードと呼ばれるノードから到達可能なノードやエッジによって表現される。

なお、本論文では、ノードの生成や消滅は扱っていない。

このようなグラフ書き換え規則は、図1のように表現される。

この図においては、属性 Q の付いた変化ノードに対して、属性 Q が削除され、属性 Q' が追加され、属性 R の付いたノードへのラベル c の付いたエッジが削除され、属性 S の付いたノードへのラベル d の付

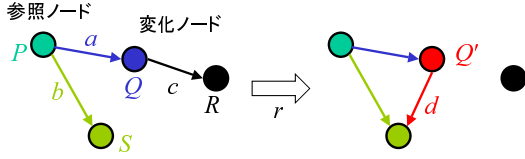


図1 グラフ書き換え規則

いたノードが追加される。

参照ノードには属性 P が付いており、ここから変化ノードへラベル a の付いたノードが存在する。また、参照ノードから属性 S の付いたノードへのラベル b の付いたノードが存在する。これらのノードやエッジは書き換えによって変化しない。

なお、以上のような書き換え規則にもラベルが付けられているとする。

2.3 Kripke 構造としてのグラフ

先に述べたように、グラフは Kripke 構造と見做すことができる。ノードは状態と考え、エッジは状態から状態への遷移と見做す。ノードに付いた属性は、そのノード(状態)において成り立つ原子命題と考える。従って、ノードの属性は命題定数によって表現する。エッジ・ラベルは遷移の種類を表し、空間方向の様相と見做される。従って、例えば、

$$P \wedge \langle a \rangle Q$$

という論理式は、属性 P の付いたノードから属性 Q の付いたノードへラベル a の付いたエッジが存在することを表している。従って、図1の書き換え前の参照ノードを v とすると、 v において論理式 $P \wedge \langle a \rangle Q$ が成り立つ。すなわち、

$$v \models P \wedge \langle a \rangle Q$$

である。より詳しくは次節で説明する。

3. 時空間様相論理

3.1 様相

時空間様相論理においては、二種類の様相を導入する。まず、エッジ・ラベルは空間方向の様相として扱う。 a, a_1, \dots でエッジ・ラベルを表す。様相論理式 ϕ に対して、 $v \models \langle a \rangle \phi$ は、ノード v からラベル a の付いたエッジによって到達可能なノード w が存在して、 $w \models \phi$ が成り立つことを意味する。

次に、書き換え規則のラベルは時間方向の様相として扱う。 r, r_1, \dots で、書き換え規則のラベルを表す。論理式 $v \models \langle r \rangle \phi$ は、書き換え規則 r による書き換えを(必ずしも v とは限らないノードに)適用した後、 v の後継ノード v' に対して、 $v' \models \phi$ が成り立つことを表す。

すなわち、書き換え規則 r の適用によってグラフが変化すると、すべてのノードはその後継ノードに様相 r によって遷移すると考える。

3.2 様相 μ 計算の必要性

ここで、様相 μ 計算の必要性について述べておく。空間様相と時間様相の二種類が様相が用意されているとき、それらを、

$$\phi \wedge \langle r \rangle \langle a \rangle \phi$$

のように組み合わせることができる。さらにその繰り返し

$$\phi \wedge \langle r \rangle \langle a \rangle \phi \wedge$$

$$\langle r \rangle \langle a \rangle \langle r \rangle \langle a \rangle \phi \wedge$$

$$\langle r \rangle \langle a \rangle \langle r \rangle \langle a \rangle \langle r \rangle \langle a \rangle \phi \wedge$$

...

は、書き換えの「波」を表現していると考えられることができる。このような「波」を一般に表現するためには、以下のように、様相 μ 計算が必要となる。

$$\nu X. \phi \wedge \langle r \rangle \langle a \rangle X$$

3.3 論理式

時空間様相論理の論理式は以下のように定義される。

$$\begin{array}{l|l|l} \phi & ::= & P \quad | \quad \neg P \\ & & \phi \vee \phi \quad | \quad \phi \wedge \phi \\ & & \langle a \rangle \phi \quad | \quad [a] \phi \\ & & \langle r \rangle \phi \quad | \quad [r] \phi \\ & & \mu X. \phi \quad | \quad \nu X. \phi \\ & & X \end{array}$$

P は命題定数、 X は命題変数を表す。様相演算子 $\langle r \rangle$ と $[r]$ を含まない論理式を空間論理式と呼ぶ。様相演算子 $\langle a \rangle$ と $[a]$ を含まない論理式を時間論理式と呼ぶ。

上の定義では、否定 \neg が命題定数の前のみに現れているが、これは μ 演算子と ν 演算子の定義を簡単にするためである。否定は適宜用いるものとする。例えば、 $\neg \langle a \rangle \phi$ は、 $[a] \neg \phi$ と等価である。

4. グラフ書き換えの表現

4.1 書き換え規則の表現

書き換え規則 r は、以下のような論理式によって表現される。 v を変化ノードとする。

Pre_r は、書き換え前の変化ノードにおいて成り立つ論理式である。例えば、図1の書き換え規則を r とすると、 Pre_r は以下ようになる。

$$\text{Pre}_r = Q \wedge \langle c \rangle R$$

これは、 v から属性 R の付いたノードへラベル c の付いたエッジが存在することを表している。

一般に、 Pre_r は、以下の論理式の連言とする。そ

れぞれ、その右に書いたように、変化ノードに対する条件を表している。

- P : 属性 P の存在
- $\neg P$: 属性 P の非存在
- $\langle a \rangle P$: 属性 P の付いたノードへのラベル a の付いたエッジの存在
- $\neg \langle a \rangle P$: 属性 P の付いたノードへのラベル a の付いたエッジの非存在

Post_r は、書き換え後の変化ノードにおいて成り立つ論理式である。図 1 の書き換え規則を r とすると、 Pre_r は以下ようになる。

$$\text{Post}_r = Q' \wedge \neg Q \wedge \langle d \rangle S \wedge \neg \langle c \rangle R$$

これは、属性 Q' が追加され、属性 Q が削除され、属性 S の付いたノードへのラベル d の付いたエッジが追加され、属性 R の付いたノードへのラベル c の付いたエッジが削除されることを意味している。

一般に、 Post_r は、以下の論理式の連言とする。それぞれ、その右に書いたように、変化ノードの書き換えの状況を表している。

- P : 属性 P の追加
- $\neg P$: 属性 P の削除
- $\langle a \rangle P$: 属性 P の付いたノードへのラベル a の付いたエッジの追加
- $\neg \langle a \rangle P$: 属性 P の付いたノードへのラベル a の付いたエッジの削除

次に、 $\text{Context}_r(X)$ は、参照ノードから見た変化ノードの文脈を表す論理式である。 X は命題変数であり、 X に Pre_r を代入して得られる論理式

$$\text{Context}_r(\text{Pre}_r)$$

が、書き換えの条件を表している。 $\text{Context}_r(X)$ は、到達可能性論理式と呼ぶ論理式である。これについては、次節で定義する。

図 1 の規則 r に対しては、

$$\text{Context}_r(X) = P \wedge \langle a \rangle X \wedge \langle b \rangle S$$

となる。

4.2 到達可能性論理式

到達可能性論理式 $\alpha(X)$ は、空間論理式の一種である。 $\alpha(X)$ は、命題変数 X を含む論理式である。

$$\begin{array}{l} \alpha(X) ::= X \\ \quad | \alpha(X) \vee \alpha(X) \\ \quad | \phi \wedge \alpha(X) \\ \quad | \langle a \rangle \alpha(X) \\ \quad | \mu Y. \alpha(X) \\ \quad | Y \end{array}$$

Y は μ 演算子の束縛変数を表す。 ϕ には Y は現れないとする。

到達可能性論理式 $\alpha(X)$ は、あるノード v から X が成り立つノードが到達可能であることを意味する。 $\alpha(X)$ の成立に際して、 X が成り立つノードは高々一回だけ参照される。従って、そのノードが変化して Y が成り立つようになったとき、 v において $\alpha(Y)$ が成り立つ。

従って、

$$\text{Context}_r(\text{Post}_r)$$

が、書き換え後の状況を表す。

書き換えを論理式によって表現するために、変化ノードと参照ノードに加えて、視点ノードを導入する。視点ノードは、書き換えを観測するための任意のノードである。そして、 $\alpha(X)$ を到達可能性論理式とする。

すると、視点ノードから見て、書き換え規則 r による書き換えは、以下の二つの論理式によって表現される。

- 書き換え前: $\alpha(\text{Context}_r(\text{Pre}_r))$
- 書き換え後: $\alpha(\text{Context}_r(\text{Post}_r))$

さらに、書き換えによって変化しないことを保証するために、不変論理式概念を導入する。

$\alpha(X)$ と $\text{Context}_r(X)$ は、次節で定義される r -不変論理式でなければならない。

4.3 不変論理式と制限

不変論理式は、書き換えによって真から偽にならない空間論理式である。

書き換え規則 r に対して、空間論理式 ϕ が r -不変論理式であるとは、論理式 ϕ/r と ϕ が等価であることを意味する。ここで、 ϕ/r は r による ϕ の制限と呼び、図 2 により定義する。なお、論理式 ϕ/r と ϕ が等価であるとは、書き換えのもとで常に ϕ/r と ϕ が等価になることを意味するが、特に、 ϕ/r と ϕ が構文的に同じ場合や、様相 μ 計算のもとで同値である場合を含む。

論理式 ϕ/r は、書き換えによって真から偽に変化する可能性のある部分に Pre_r の否定を挿入したもので、 ϕ/r 自身は、書き換えによって真から偽に変化しない。従って、 ϕ/r と ϕ が等価ならば、 ϕ は書き換えによって真から偽に変化しない。

なお、図 2 の ϕ/r の定義は、かなり近似的なものであり、より精密な定義も可能である。

4.4 推論規則

$\alpha(X)$ は r -不変な到達可能性論理式であった。さらに、 θ を r -不変論理式、 ψ を任意の(時空間)論理式とする。 θ は変化ノードをより詳細に指定するための論理式である。

$P/r = \neg \mathbf{Pre}_r \wedge P$	if r が P を削除
$P/r = P$	otherwise
$(\neg P)/r = \neg \mathbf{Pre}_r \wedge P$	if r が P を追加
$(\neg P)/r = \neg P$	otherwise
$(\phi_1 \vee \phi_2)/r = \phi_1/r \vee \phi_2/r$	
$(\phi_1 \wedge \phi_2)/r = \phi_1/r \wedge \phi_2/r$	
$(\mu X.\phi)/r = \mu X.(\phi/r)$	
$(\nu X.\phi)/r = \nu X.(\phi/r)$	
$X/r = X$	
$\langle a \rangle \phi / r = \neg \mathbf{Pre}_r \wedge \langle a \rangle (\phi / r)$	if r が a を削除し , ある $\neg \langle a \rangle P \in \mathbf{Post}_r$ に対して , P が ϕ に様相演算子の外に陽に現れる
$\langle a \rangle \phi / r = \langle a \rangle (\phi / r)$	otherwise
$[a] \phi / r = \neg \mathbf{Pre}_r \wedge [a] (\phi / r)$	if r が a を追加し , ある $\langle a \rangle P \in \mathbf{Post}_r$ に対して , P が ϕ に様相演算子の外に陰に現れる
$[a] \phi / r = [a] (\phi / r)$	otherwise

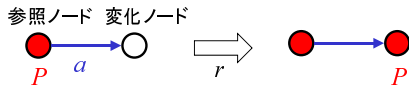
図 2 r による制限

図 3 簡単な例

すると、推論規則の前提は以下ようになる。

$$\alpha(\mathbf{Context}_r(\theta \wedge \mathbf{Post}_r)) \rightarrow \psi$$

ここで、 \rightarrow は「ならば」を表す推論体系の記号であるとする。そして、結論は

$$\alpha(\mathbf{Context}_r(\theta \wedge \mathbf{Pre}_r)) \rightarrow \langle r \rangle \psi$$

となる。この推論規則を、様相 μ 計算の適当な推論体系のもとで用いる。本論文では、具体的な推論体系までは立ち入らない。

θ を詳細化すれば、任意の精度で書き換え箇所を指定することができる。極端には、個々のノードに対して、それを特定できる属性があって、そのような属性は書き換えによって変化しないとすれば、特定のノードを変化ノードとして指定することも可能である。

4.5 簡単な例

簡単な例を与える。図 3 のような簡単な書き換え規則 r を考える。

- $\mathbf{Context}_r(X) = P \wedge \langle a \rangle X$
- $\mathbf{Pre}_r = \mathbf{true}$
- $\mathbf{Post}_r = P$

\mathbf{true} は、すべてのノードに付いていて決して削除されない属性とする。

推論規則における論理式を以下のように設定する。

- $\alpha(X) = (\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge X$
- $\theta = \mathbf{true}$
- $\psi = \alpha(\mathbf{Context}_r(\theta \wedge \mathbf{Post}_r))$

すると、推論規則の前提は、

$$(\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P \wedge \langle a \rangle P \rightarrow (\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P \wedge \langle a \rangle P$$

となり、これは明らかに成り立つ。そして、結論は

$$(\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P \wedge \langle a \rangle \mathbf{true} \rightarrow \langle r \rangle (\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P \wedge \langle a \rangle P$$

となる。この結論から、 ν の性質などを用いて、

$$(\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P \rightarrow \langle r \rangle \langle a \rangle ((\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P)$$

が導かれる。すると、 ν に対する推論を行えば、

$$(\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P \rightarrow \nu Z. (\nu Y. \langle a \rangle \mathbf{true} \wedge [a] Y) \wedge P \wedge \langle r \rangle \langle a \rangle Z$$

が得られる。

5. 状態量化

5.1 様相論理の限界

そもそも、様相論理は木を表現するためのものであり、グラフを表現することには限界がある。例えば、図 1 の規則を図 4 の左図に適用したとき、右の上下のどちらの可能性もあり得る。

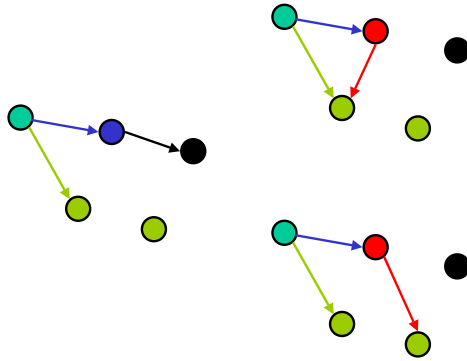


図4 様相論理の限界

要するに、様相は、状態そのものを指定することができず、状態の同一性を表現できないのである。すなわち、様相論理式は木を表現できるが、グラフを表現できない。

5.2 状態量化の導入

そこで、本論文の最後に、様相論理に状態量化を導入する可能性について議論する。次のような形の論理式を新たに導入する。

$$\exists Z. \phi$$

これは「ある状態に対して、 Z はその状態でのみ真となる述語として、 ϕ が成り立つ」ことを意味する。

すると、図1の規則 r に対して、その文脈は、

$$\text{Context}_r(X) = \exists Z. P \wedge \langle a \rangle X \wedge \langle b \rangle (S \wedge Z)$$

と与えることができる。そして、 Post_r は、

$$\text{Post}_r = Q' \wedge \neg Q \wedge \langle d \rangle Z \wedge \neg \langle c \rangle R$$

となる。ここでは、 $\text{Context}_r(X)$ の中の Z が参照されている。

5.3 状態量化の課題

状態量化を含む様相論理に対する推論は簡単ではない。明らかに、充足可能性は決定不能である。従って、完全ではないせよ、実際のな証明系を構築することは重要である。例えば、タブロー法を拡張することは興味深い。

状態量化を含む様相論理に対する有限モデル検査は、素朴には可能であるが、効率よく行うためには工夫が必要であると考えられる。

しかしながら、状態量化は表現力が大きく、様々な用途が考えられるので、研究する価値は大いにありそうである。

謝 辞

いつも、著者の思い付きに付き合っていていただく高橋孝一氏に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 高橋孝一, 萩谷昌己. 正則表現を用いた並列ごみ集めの抽象モデル検査. 情報処理学会論文誌, Vol.42, No.SIG2(PRO9), pp.61-70, 2001.
- 2) Mitsuharu Yamamoto, Jean-Marie Cottin, and Masami Hagiya. Decidability of Safety Properties of Timed Multiset Rewriting. *7th International Symposium on Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems*, pp.165-183, 2002.
- 3) Koichi Takahashi and Masami Hagiya. Formal Proof of Abstract Model Checking of Concurrent Garbage Collection. *Thirty Five years of Automath*, pp.115-126, 2002.
- 4) 山本 光晴, ジャン-マリ コタン, 萩谷 昌己. 時間付き多重集合書き換えの有界性と到達可能性の解析. 情報処理学会第38回プログラミング研究会, 2002.
- 5) Edmund M. Clarke, Orna Grumberg and Doron A. Peled. *Model Checking*. MIT press, 1999.
- 6) Grzegorz Rozenberg, editor. *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation, Vol. 1: Foundations*. World Scientific, 1997.

(平成?年?月?日受付)

(平成?年?月?日採録)

萩谷 昌己 (正会員)

昭和57年東京大学大学院理学系研究科情報科学専攻修士課程修了。京都大学数理解析研究所を経て、現在、東京大学大学院情報理工学系研究科教授(コンピュータ科学専攻)。

計算システムをモデル化し、特に演繹的な方法を用いて、その性質を計算機上で検証することに興味を持っている。最近では、電子計算機から成る計算システム以外にも、生物系や分子系も研究の対象としている。特に、分子コンピューティングの研究を行っている。