情報論理試験追試 2006 年 1 月 16 日

以下の問題において、特に断らない限り論理式とは一階述語論理の論理式を意味する。また、x, y 等は変数、c, d 等は定数記号、f, g 等は関数記号、P, Q 等は命題記号または述語記号を表す。

1. 以下の各論理式について、「恒真」「恒真でないが充足可能」「充足不能」のいずれかであるか判定せよ。

(1) $P \vee \neg P$
(2) $P \vee \neg Q$
(3) $P \wedge \neg Q$
(4) $P \wedge \neg P$
(5) $P(x) \vee \neg(\forall y.\ P(y))$
(6) $P(x) \vee (\forall y.\ \neg P(y))$
(7) $P(x) \vee (\forall y.\ \neg Q(y))$
(8) $P(x) \wedge (\forall y.\ \neg Q(y))$
(9) $P(x) \wedge (\forall y.\ \neg P(y))$
(10) $P(x) \wedge \neg(\forall y.\ P(y))$

2. 次の論理式に対して、

$$P(c) \wedge (\forall x.\ P(x) \supset \neg P(f(x)) \wedge (\forall x.\ \neg P(x) \supset P(f(x)))$$

(1) この論理式を充足する解釈で領域が有限集合であるものを求めよ。

(2) この論理式を充足する Herbrand 解釈を与えよ。

3. 命題論理のコンパクト性とは、命題論理式の集合 Γ の任意の有限部分集合が充足可能ならば、Γ 自身が充足可能になることを言う。命題論理のコンパクト性が成り立つ理由を、Γ が可算無限集合の場合について簡単に説明せよ。

4. $A[x, y]$ は変数 x と y のみを自由に含む論理式とする。f は $A[x, y]$ に現れない新しい一引数の関数記号とする。$\forall x.\exists y.A[x, y]$ が充足可能ならば、$\forall x.A[x, f(x)]$ は充足可能であることを示せ。

5. 論理式 $A[x_1, \cdots, x_n]$ は、変数 $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由に含み、$\forall\exists$ は含まないとする。論理式 $\forall x_1 \ldots \forall x_n.A[x_1, \cdots, x_n]$ が充足不能ならば、$\Gamma = \{A[t_1, \cdots, t_n] : t_1, \cdots, t_n$ は閉じた項 $\}$ は、命題論理式の集合として充足不能である。従って、命題論理のコンパクト性より、Γ のある有限部分集合が充足不能になる。

実際に以下の充足不能な論理式に対して、Γ の充足不能な有限部分集合は何か。

$$\forall x_1.\ P(c) \wedge (P(x_1) \supset Q(f(x_1))) \wedge \neg Q(x_1)$$

6. 以下の恒真な論理式を、適当な演繹体系 (例えばシーケント計算、ヒルベルト流) のもとで証明せよ。

$$\exists x.\forall y.\ \neg(P(c) \land (P(x) \supset Q(y)) \land \neg Q(x))$$

ヒルベルト流による場合は、以下にあげる公理と推論規則を用いてよい。

公理:

- トートロジー
- $(\forall x.A \lor B[x]) \supset A \lor (\forall x.B[x])$ という形の論理式 (A には x は自由に現れない)
- $(\forall x.A[x] \lor B) \supset (\forall x.A[x]) \lor B$ という形の論理式 (B には x は自由に現れない)
- $A[t] \supset (\exists x.A[x])$ という形の論理式 (t は任意の項)

推論規則:

- $A[x]$ から $\forall x.A[x]$ を導くことができる (汎化)。
- A と $A \supset B$ から B を導くことができる (MP)。

7. $T(e,x,y)$ を Kleene の述語とする。すなわち、インデックス e のチューリング機械が入力 x に対して停止する計算過程を符号化したものが y であるとき、$T(e,x,y)=0$ となり、そうでないとき $T(e,x,y) = 1$ となる。なお、自然数 x に対して、$\overline{x}$ は successor 関数 S を x 個含む $S(\cdots(S(0))\cdots)$ という形の項を表す。

いま、一階の算術において、論理式 $A_T[e,x,y,z]$ が T を表現すると仮定する。すなわち、以下が成り立つことを仮定する。

> $T(e,x,y) = 0$ ならば $A_T[\overline{e},\overline{x},\overline{y},0]$ が証明でき、$T(e,x,y) = 1$ ならば $A_T[\overline{e},\overline{x},\overline{y},S(0)]$ が証明できる。さらに、$\forall e.\forall x.\forall y.\forall z_1.\forall z_2.\ A_T[e,x,y,z_1] \land A_T[e,x,y,z_2] \supset z_1 = z_2$ が証明できる。

(1) 以下のように定義される自然数の集合 K が帰納的でないことを説明せよ。

$$K \ = \ \{x : T(x,x,y) = 0 \text{ を満たす } y \text{ が存在する } \}$$

(2) (1) を用いて真であるが証明できない論理式が存在することを示せ。