時相論理による抽象化を用いたセル・オートマトンの解析[*]

Analysis of Cellular Automata Using Abstraction by Temporal Logic

萩谷 昌己[†] 高橋 孝一[††] 山本 光晴[†††] 佐藤 貴洋[†]
Masami HAGIYA Koichi TAKAHASHI Mitsuharu YAMAMOTO Takahiro SATO

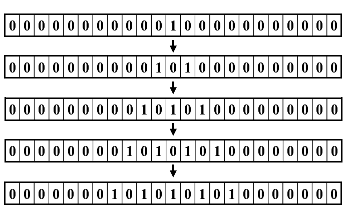
[†] 東京大学 [††] 産業技術総合研究所 [†††] 千葉大学
University of Tokyo AIST Chiba University
hagiya@is.s.u-tokyo.ac.jp

我々は従来研究において，時相論理を用いて，互いにポインタで繋がれたセルから成るリンク構造を抽象化する方法を提案した．セルはあらかじめ指定された時相論理式の真偽の組み合わせを表す抽象セルによって抽象化され，リンク構造全体は抽象セルの集合によって抽象化される．本発表では，この方法を用いてセル・オートマトンを解析する試みについて述べる．従来研究と違って，すべてのセルが同期して状態を遷移させるので，各抽象セルの次状態を計算することにより，抽象化されたリンク構造の次状態が求まる．この新しい状態を再び抽象化するために，抽象セルの分裂と融合の操作を導入した．この方法により，実際に一次元(および二次元) のセル・オートマトンの簡単なものを解析することができた．本発表では，本方法のベースとなっている時相論理である 2 方向 CTL(computation tree logic) とその充足可能性判定についても簡単に述べる．

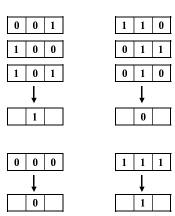
1 事例: 簡単な一次元セル・オートマトン

我々は，従来研究において，互いにポインタで繋がれたセルから成るリンク構造を抽象化するために，時相論理を用いる方法を提案した [2].

本発表では，この方法を用いてセル・オートマトンを解析する試みについて述べる．最初の事例として，以下のような一次元のセル・オートマトンを考える．セルは左右に無限に伸びている．



このセル・オートマトンは，以下の規則に従って，各セルの状態 (0 または 1) を同期的に変化させる．すなわち，少なくとも 1 個の 1 のセルと隣合う 0 のセルは 1 になる．少なくとも 1 個の 0 のセルと隣合う 1 のセルは 0 になる．



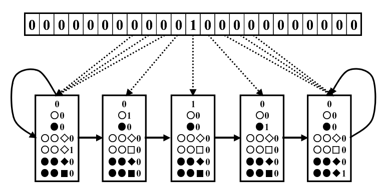
[*]本研究は，文部科学省科学研究費補助金，萌芽研究 14658088，特定領域研究 15017212 の援助を受けている．

1 のセルが 1 個のみ存在する初期状態から始めると，先の図のようにセルの状態が変化して行く．

セル・オートマトンのセルを，その抽象化である抽象セルと対比して，具体セルと呼ぶ．

1.1 抽象セル

このセル・オートマトンの初期状態を以下の図のように抽象化する．



破線の矢印は，矢印のもとの具体セルが矢印の先の抽象セルに抽象化されることを意味する．

抽象セルの中には，その抽象セルに対応する論理式が書かれている．上図において，○は $AX_\rightarrow$，●は $AX_\leftarrow$，□は $AG_\rightarrow$，■は $AG_\leftarrow$，◇は $EF_\rightarrow$，◆は $EF_\leftarrow$ の略記法である．これらは，後に説明するように，2 方向 CTL の様相演算子である．また，$\mathbf{0}$ と $\mathbf{1}$ は原子論理式である．

この事例では，次の 7 個の論理式によって抽象化が行われている．

$$\mathbf{0} \quad AX_\rightarrow\mathbf{0} \quad AX_\leftarrow\mathbf{0}$$
$$AX_\rightarrow AX_\rightarrow AG_\rightarrow\mathbf{0} \quad AX_\rightarrow AX_\rightarrow AG_\rightarrow\mathbf{1}$$

$$AX_{\leftarrow}AX_{\leftarrow}AG_{\leftarrow}\mathbf{0} \qquad AX_{\leftarrow}AX_{\leftarrow}AG_{\leftarrow}\mathbf{1}$$

論理式 $\mathbf{0}$ は，セルの状態が 0 であることを意味する．論理式 $AX_{\rightarrow}\phi$ は，右隣のセルにおいて ϕ が成り立つことを意味する．論理式 $AG_{\rightarrow}\phi$ は，そのセルも含めて右方向のすべてのセルにおいて ϕ が成り立つことを意味する．これらは，逆様相 (backward modality) を持つ 2 方向 CTL (two-way computation tree logic) の論理式である．2 方向 CTL については 2 節で詳しく述べる．論理式 $AX_{\leftarrow}\phi$ ($AG_{\leftarrow}\phi$) は左隣 (左方向) のセルを参照する．すなわち，$\leftarrow$ は $\rightarrow$ の逆様相である．以上の 7 個の論理式の集合を F とおく．

個々の抽象セルは，7 個の論理式の真偽に対応している．すなわち，具体セル c に対して，その抽象化 $\alpha(c)$ は

$$\alpha(c) \ = \ \{\phi \in F \mid c \models \phi\}$$

と定義される．上の事例の場合，2^7 個の抽象セルが存在する．

$C \subseteq F$ を抽象セルとするとき，論理式

$$\left(\bigwedge_{\phi \in C} \phi\right) \wedge \left(\bigwedge_{\phi \in F-C} \neg\phi\right)$$

を ϕ_C と書く．

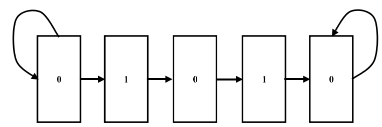
具体セルにおいては，右と左のセルはちょうど 1 個であるので，$AX_{\rightarrow}\phi$ と $EX_{\rightarrow}\phi$，および，$AX_{\leftarrow}\phi$ と $EX_{\leftarrow}\phi$ は同等になる．従って，$\mathbf{0}$ の否定は $\mathbf{1}$ であるので，$AX_{\rightarrow}\mathbf{0}$ の否定は $AX_{\rightarrow}\mathbf{1}$ と同等になる．また，$AX_{\rightarrow}AX_{\rightarrow}AG_{\rightarrow}\mathbf{0}$ の否定は，$AX_{\rightarrow}AX_{\rightarrow}EF_{\rightarrow}\mathbf{1}$ と同等になる．以上の性質は，抽象化において論理式を導出する際に用いることができる．先の図では，論理式 $\phi \in F - C$ に対して，その否定 $\neg\phi$ と同等な論理式が抽象セルの中に書かれている．

抽象セル C と D に対して，$\phi_C \wedge EX_{\rightarrow}\phi_D$ と $\phi_D \wedge EX_{\leftarrow}\phi_C$ のどちらの論理式も充足可能であるとき，C から D へ向かって，具体セルの左から右へのリンクに相当するリンクを張る．先の図では黒い矢印で表されている．

以上のようにして作られたグラフを抽象グラフという．具体セル間においてリンクがあれば，抽象セル間にもリンクが存在する．すなわち，具体セル c から d へのリンクが存在するならば，$\alpha(c)$ から $\alpha(d)$ へのリンクが存在する．

1.2　次状態の計算

次に，各抽象セルの次状態を求める．上の事例においては，$\mathbf{0}$ または $\mathbf{1}$，$AX_{\rightarrow}\mathbf{0}$ または $AX_{\rightarrow}\mathbf{1}$，$AX_{\leftarrow}\mathbf{0}$ または $AX_{\leftarrow}\mathbf{1}$ が抽象セルに含まれているので，各抽象セルの論理式からその次状態が以下のように定まる．



次に，抽象グラフの構造を利用して，各抽象セルにおいて F の各論理式を再評価する．すなわち，F の各論理式 ϕ に対して，ϕ が成り立つか，$\neg\phi$ が成り立つかを調べる．

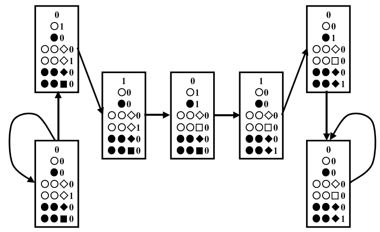
一般に，$AX_{\rightarrow}$，$AG_{\rightarrow}$，$AX_{\leftarrow}$，$AG_{\leftarrow}$ のみを含む論理式 ϕ が抽象セル $\alpha(c)$ において真となった場合，具体セル c においても，その論理式は成り立つはずである．なぜなら，具体グラフにおけるリンクは抽象グラフにおいても存在するからである．

しかし，例えば $EF_{\rightarrow}$ を含む論理式が抽象セル $\alpha(c)$ において真となったとしても，具体セル c において真になるとは限らない．このような論理式を評価するために，抽象セル C と D の間に次のような到達可能性を考える．「C に抽象化される任意の具体セル c に対して，D に抽象化される具体セル d が存在して，c から右方向へ進むと d に到達する．」同様に，左方向への到達可能性も考える．

抽象セルの任意の組の間に，以上のような到達可能性が成り立つかどうかを記録する．初期状態の抽象化に対して到達可能性を記録し，以下に述べるように，抽象セルの分割と融合が起こったときには，到達可能性を継承させる．これについては，1.4 節で再び述べる．

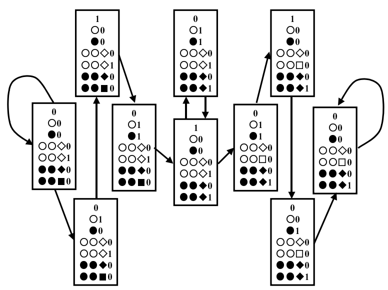
1.3　抽象セルの分割と融合

各抽象セルにおいて再評価を行ったとき，どうしても真偽が定まらないものについては，真と偽の二つの場合に分けなければならない．これは，抽象セルを分割することに対応している．例えば，上の事例の場合，最も左の抽象セルに関しては，$AX_{\rightarrow}\mathbf{0}$ が成り立つかどうかが定まらない．従って，このセルは $AX_{\rightarrow}\mathbf{0}$ と $AX_{\rightarrow}\mathbf{1}$ ($AX_{\rightarrow}\mathbf{0}$ の否定) を持つ二つの抽象セルに分割される．最も右の抽象セルも同様であり，結果として，以下のような抽象グラフが得られる．



この抽象グラフは，分割後の抽象セル間のリンクを抽象セルの論理式のみから再構成したものである．

再評価を行った後，同じ抽象セルが二つ以上得られた場合は，それらは一つに融合される．融合が行われた後に抽象グラフが構成される．**融合の操作があるからこそ，抽象グラフの大きさは相異なる抽象セルの数で押えられる．**上の事例の場合は，最終的に，以下の抽象グラフが得られる．



1.4 抽象セル間の到達可能性と論理式の再評価

抽象グラフの中にある抽象セル C に対応して，p_C という原子論理式を導入する．

抽象セル C から抽象セル D への右方向の到達可能性は，

$$p_C \supset EF_{\rightarrow} p_D$$

という論理式によって表現することができる．

上の事例においては，論理式の再評価は，以下のような仮定のもとで行えばよい．

- 抽象セルの新しい状態が 0 ならば，$p_C \supset \mathbf{0}$ を仮定する．状態 1 に対しても同様．
- 抽象セル C から抽象セル $D_1, \cdots, D_n$ への右方向のリンクが存在するとき，$p_C \supset AX_{\rightarrow}(p_{D_1} \vee \cdots \vee p_{D_n})$ を仮定する．左方向のリンクに対しても同様．
- 上述したように，到達可能性を表す論理式を仮定する．

以上のような仮定と，1.1 節で述べたような性質のもとで，$p_C \supset \phi$ を導出することにより，論理式 ϕ を抽象セル C において再評価する．

到達可能性は，抽象セルが分割される際に継承される．例えば，抽象セル D が D_1 と D_2 に分割されるとき，到達可能性 $p_C \supset EF_{\rightarrow} p_D$ は，$p_C \supset EF_{\rightarrow}(p_{D_1} \vee p_{D_2})$ となる．抽象セルが融合されるときも同様である．

分割と融合の後に抽象グラフを再構成する．このとき，抽象セルの論理式だけでなく，リンクや到達可能性を表す論理式を用いることもできる．

2 2 方向 CTL

先の事例において，$\rightarrow$ と $\leftarrow$ は，互いに逆の様相を表している．本節では，このように逆様相を持つ 2 方向 CTL について簡単に紹介し，その証明手続き (充足可能性判定手続き) について証明なしで述べる．

逆様相を持つ様相論理については詳しく研究されている．特に，Vardi は逆様相を持つ 2 方向 μ 計算に対して，オートマトンに基づく証明手続きを与えている [1]．それに対して，ここで述べる 2 方向 CTL の証明手続きは驚くほど単純であり，通常の CTL のものとほとんど変わらない．

2.1 論理式

ϕ は，以下のように定義される正形式 (positive form) の論理式とする．

$$\phi \ ::= \ p \ | \ \neg p \ | \ M\phi \ | \ \phi \wedge \phi \ | \ \phi \vee \phi$$

p は原子論理式である．M は様相演算子であり以下のいずれかである．

$$AX_A \quad EX_A \quad AG_A \quad EG_A \quad AF_A \quad EF_A$$

A は様相のラベルの有限集合である．様相のラベルは a などで表す．ラベル a に対して，$\overline{a}$ はその逆方向の様相を表すラベルとする．$\overline{\overline{a}}$ は a に等しい．なお，$AX_{\{a\}}$ などは単に AX_a などと書く．**until** 演算子を導入することはもちろん可能であるが，本発表では煩雑さを避けるために **until** を含めない．

$\langle S, \{R_a\}, L\rangle$ を Kripke 構造とする．S は状態集合である．各 $R_a \subseteq S \times S$ は様相 a に対応する状態間の遷移関係で，

$$R_{\overline{a}} \ = \ \{\langle s_1, s_2\rangle \mid \langle s_2, s_1\rangle \in R_a\}$$

を満たす．L は状態に原子論理式の集合を対応させるラベル付け関数である．無限の状態列 $s_0, s_1, \cdots$ が A 経路であるとは，任意の i に対してある $a \in A$ が存

在して $s_i R_a s_{i+1}$ が成り立つことをいう．有限の状態列 $s_0, s_1, \cdots, s_n$ が A 経路であるとは，任意の $i < n$ に対してある $a \in A$ が存在して $s_i R_a s_{i+1}$ が成り立ち，$s_n R_a t$ を満たす $a \in A$ と $t \in S$ が存在しないことをいう．

状態 s と論理式 ϕ に対して，関係 $s \models \phi$ は以下のように定義される．

- $s \models p$ **iff** $p \in L(s)$
- $s \models AX_A\phi$ **iff** sR_at を満たす任意の $a \in A$ と $t \in S$ に対して，$t \models \phi$
- $s \models EX_A\phi$ **iff** sR_at かつ $t \models \phi$ を満たす $a \in A$ と $t \in S$ が存在する
- $s \models AG_A\phi$ **iff** s で始まる任意の A 経路 $s = s_0, s_1, \cdots$ と任意の i に対して $s_i \models \phi$
- $s \models EG_A\phi$ **iff** s で始まる無限 A 経路 $s = s_0, s_1, \cdots$ が存在して，任意の i に対して $s_i \models \phi$
- $s \models AF_A\phi$ **iff** s で始まる任意の無限 A 経路 $s = s_0, s_1, \cdots$ に対して，ある i が存在して $s_i \models \phi$
- $s \models EF_A\phi$ **iff** s で始まる A 経路 $s = s_0, s_1, \cdots$ と i が存在して，$s_i \models \phi$

Kripke 構造とその状態 s で $s \models \phi$ を満たすものが存在するとき，ϕ は充足可能であるという．

2.2 充足可能性の判定

論理式 ϕ_0 に対して，論理式の集合 $cl(\phi_0)$ は，以下の条件を満たす最小の集合とする．

- $\phi_0 \in cl(\phi_0)$
- $\phi_1 \wedge \phi_2 \in cl(\phi_0)$ ならば，$\phi_1 \in cl(\phi_0)$ かつ $\phi_2 \in cl(\phi_0)$
- $\phi_1 \vee \phi_2 \in cl(\phi_0)$ ならば，$\phi_1 \in cl(\phi_0)$ かつ $\phi_2 \in cl(\phi_0)$
- $M\phi \in cl(\phi_0)$ ならば，$\phi \in cl(\phi_0)$
- $\phi \in cl(\phi_0)$ かつ $expand(\phi)$ が定義されているならば，$expand(\phi) \in cl(\phi_0)$

ここで，$expand(\phi)$ は以下のように定義される．

$$\begin{aligned}
expand(AG_A\phi) &= \phi \wedge AX_A AG_A\phi \\
expand(EG_A\phi) &= \phi \wedge EX_A EG_A\phi \\
expand(AF_A\phi) &= \phi \vee AX_A AF_A\phi \\
expand(EF_A\phi) &= \phi \vee EX_A EF_A\phi
\end{aligned}$$

$\Gamma \subseteq cl(\phi_0)$ とする．$\phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma$ ならば $f(\phi_1 \vee \phi_2) \in \{1, 2\}$ が成り立ち，$EX_A\phi \in \Gamma$ ならば $f(EX_A\phi) \in A$ が成り立つとき，f を Γ 上の選択関数という．以下の条件が満たされるとき，Γ とその上の選択関数 f の組 $\langle \Gamma, f \rangle$ を ϕ_0 型と呼ぶ．

- $p \in \Gamma$ と $\neg p \in \Gamma$ は同時には成り立たない．
- $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Gamma$ ならば，$\phi_1 \in \Gamma$ かつ $\phi_2 \in \Gamma$
- $\phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma$ ならば，$\phi_{f(\phi_1 \vee \phi_2)} \in \Gamma$
- $\phi \in \Gamma$ かつ $expand(\phi)$ が定義されているならば，$expand(\phi) \in \Gamma$

各様相 a に対して，ϕ_0 型の間の遷移関係 $\langle \Gamma, f \rangle \xrightarrow{a} \langle \Gamma', f' \rangle$ を以下のように定義する．

- ある $EX_A\phi \in \Gamma$ が存在して，$f(EX_A\phi) = a$ かつ $\phi \in \Gamma'$
- 任意の $AX_A\psi \in \Gamma$ に対して，$a \in A$ ならば $\psi \in \Gamma'$
- 任意の $AX_A\psi \in \Gamma'$ に対して，$\overline{a} \in A$ ならば $\psi \in \Gamma$
- 以下の条件を満たす $AF_A\psi$ が存在しない．
  - $a \in A$ かつ $\overline{a} \in A$
  - $AF_A\psi \in \Gamma$ かつ $AF_A\psi \in \Gamma'$
  - $f(\psi \vee AX_A AF_A\psi) = 2$
  - $f'(\psi \vee AX_A AF_A\psi) = 2$

以下の手続きは，矛盾した ϕ_0 型を繰り返し削除することにより，与えられた論理式 ϕ_0 の充足可能性を判定するものである．

$EX_A\phi \in \Gamma$ が成り立つとき，$\langle \Gamma, f \rangle \xrightarrow{f(EX_A\phi)} \langle \Gamma', f' \rangle$ を満たす ϕ_0 型 $\langle \Gamma', f' \rangle$ がすべて削除されていれば，$\langle \Gamma, f \rangle$ も削除する．

$\psi_0 = AF_A\psi$ または $\psi_0 = EF_A\psi$ とする．$\langle \Gamma_0, f_0 \rangle$ を ϕ_0 型とし，$\psi_0 \in \Gamma_0$ とする．削除されていない ϕ_0 型をラベルとする有限木 T_0 に対して，以下のような条件を課する．

- 根は $\langle \Gamma_0, f_0 \rangle$ をラベルとする．

- 親と子のラベルの間には，ある $a \in A$ に対して遷移関係 $\xrightarrow{a}$ が成り立つ．

- T_0 の任意の節のラベル $\langle \Gamma, f \rangle$ に対して，$\psi_0 \in \Gamma$ が成り立つ．

さらに，$\psi_0 = AF_A\psi$ の場合は以下のような条件を課する．

- T_0 の任意の内部節に対して，そのラベルを $\langle \Gamma, f \rangle$ とすると，$f(EX_B\phi) \in A$ となる任意の $EX_B\phi \in \Gamma$ に対して，$\langle \Gamma, f \rangle \stackrel{f(EX_B\phi)}{\rightarrow} \langle \Gamma', f' \rangle$ かつ $\phi \in \Gamma'$ を満たす $\langle \Gamma', f' \rangle$ をラベルとする子供が存在する．

- T_0 の任意の内部節のラベル $\langle \Gamma, f \rangle$ に対して，$f(\psi \vee AX_A\psi_0) = 2$．

- T_0 の任意の境界節のラベル $\langle \Gamma, f \rangle$ に対して，$f(\psi \vee AX_A\psi_0) = 1$ が成り立つか，または，$f(EX_B\phi) \in A$ を満たす $EX_B\phi \in \Gamma$ が存在しない．

ただし，T_0 の内部節とは子供を少なくとも一つ持つ節，境界節とは内部節でない節のことである．

さらに，$\psi_0 = EF_A\psi$ の場合は以下のような条件を課する．

- T_0 は，その根から唯一の境界節に至る経路であり，以下の条件を満たす．

- 経路上の内部節のラベル $\langle \Gamma, f \rangle$ に対して，$f(\psi \vee EX_A\psi_0) = 2$ が成り立ち，経路上の次の節のラベル $\langle \Gamma', f' \rangle$ に対して，$\langle \Gamma, f \rangle \stackrel{f(EX_A\psi_0)}{\rightarrow} \langle \Gamma', f' \rangle$ かつ $\psi_0 \in \Gamma'$ が成り立つ．

- 経路上の境界節のラベル $\langle \Gamma, f \rangle$ に対して，$f(\psi \vee EX_A\psi_0) = 1$．

以上の条件を満たす木 T_0 が存在しないならば，$\langle \Gamma_0, f_0 \rangle$ を削除する．

可能な限り ϕ_0 型の削除を繰り返し行い，それ以上削除ができなくなったところで，$\phi_0 \in \Gamma$ を満たす ϕ_0 型 $\langle \Gamma, f \rangle$ が一つでも削除されずに残っていれば，ϕ_0 は充足可能となる．

3 事例: ライフ・ゲーム

ライフ・ゲームの場合，4 方向の様相 $\rightarrow\leftarrow\downarrow\uparrow$ を用意する．抽象セルを定義するためには，最低限，次の論理式が必要である．

$$\mathbf{0} \quad AX_{\rightarrow}\mathbf{0} \quad AX_{\uparrow}\mathbf{0} \quad AX_{\leftarrow}\mathbf{0} \quad AX_{\downarrow}\mathbf{0}$$
$$AX_{\rightarrow}AX_{\uparrow}\mathbf{0} \quad AX_{\rightarrow}AX_{\downarrow}\mathbf{0}$$
$$AX_{\leftarrow}AX_{\uparrow}\mathbf{0} \quad AX_{\leftarrow}AX_{\downarrow}\mathbf{0}$$

特に，これらの論理式は抽象セルの次状態を求めるために必要である．さらに，以下のような論理式を考えることができる．

$$AX_{\rightarrow}AX_{\rightarrow}AG_{\rightarrow}\mathbf{0}$$
$$AX_{\uparrow}AX_{\rightarrow}AX_{\rightarrow}AG_{\rightarrow}\mathbf{0}$$
$$AX_{\rightarrow}AX_{\rightarrow}AX_{\uparrow}AX_{\uparrow}AG_{\{\rightarrow,\uparrow\}}\mathbf{0}$$
$$\ldots$$

様相 $\uparrow$ と $\downarrow$ は互いに逆様相になっている．これに加えて，具体セルが満たすべき性質が多くある．例えば，$AX_{\rightarrow}AX_{\uparrow}\phi$ と $AX_{\uparrow}AX_{\rightarrow}\phi$ は同等である．

以下は，次第に短くなって消滅するパターンである．

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

現在，このパターンの解析を行っている．

4 今後の課題

多くの課題が残されている．

- 充足可能性判定プログラム実装・解析プログラムの実装

- CTL*への拡張・μ 計算への拡張

- 2 方向だけでなく，具体セルの性質を反映した論理への拡張

- 時間パラメータを導入することによるハイブリッド化: 生物の形態形成や分子システムの自己組織化のモデル化に利用できるかもしれない．

参考文献

[1] Moshe Y. Vardi: Reasoning about the past with two-way automata, *Automata, Languages and Programming ICALP 98, Lecture Notes in Computer Science,* Springer, Vol.1443, 1998, pp.628-641.

[2] Koichi Takahashi and Masami Hagiya: Abstraction of Graph Transformation Using Temporal Formulas, *Workshop on Model-Checking for Dependable Software-Intensive Systems, International Conference on Dependable Systems and Networks, DSN2003.* `http://nicosia.is.s.u-tokyo.ac.jp/members/hagiya.html`